Vorbereitungskurs

Mathematik

für die

Berufsoberschule II

www.bbs-gerolstein.de/cms/download/Mathematik/vorkurs-mathe-bos-2.pdf
bzw.
www.p-merkelbach.de/bos2/mathe/vorkurs-mathe-bos-2.pdf

Erstellt von: Herr Merkelbach

Stand: 25.08.2009

Inhaltsverzeichnis

0. Vorwort

Sehr geehrte Schülerinnen und Schüler!

Ihr habt euch für das kommende Schuljahr für die Berufsoberschule II an der BBS Gerolstein angemeldet.

In dieser genannten Schulform werden in der Mathematik die so genannten Lernbausteine 5, 6 und 7 unterrichtet.

Das bedeutet, das wir die Kenntnisse, die in den Lernbausteinen 1 und 2 (entspricht dem Sekundarabschluss I) und die Bausteine 3 und 4 (entspricht der Berufsoberschule I oder Duale Berufsoberschule oder 2-jährige höhere Berufsfachschule) voraussetzen.

Damit Ihr die Möglichkeit habt, zu überprüfen, ob Eure Kenntnisse ausreichend sind, habe ich diesen Vorbereitungskurs zusammengestellt.

Ihr solltet daher **vor Beginn** des neuen Schuljahres, diesen Vorbereitungskurs durcharbeiten, um Euer Wissen aufzufrischen, damit Ihr erfolgreich und ohne größere Probleme die Mathematik bewältigen könnt.

Viel Spaß beim Rechnen!

Percy Merkelbach

1.Faktorisieren und Substitution

1.1 Faktorisieren

$$3x^4 - 8x^3 - \frac{20}{3}x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot \left(3x^2 - 8x - \frac{20}{3}\right) = 0 \qquad \textit{Faktorisieren = den gemeinsamen Faktor } x^2 \textit{ ausklammern}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$x^2 = 0 \quad \vee \quad 3x^2 - 8x - \frac{20}{3} = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{20}{9} = 0$$

$$x^2 - \frac{8}{3}x + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = +\frac{20}{9} + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \qquad \textit{Quadratische Ergänzung}$$

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = +\frac{20}{9} + \frac{16}{9}$$

$$x_{2,3} = +\frac{4}{3} \pm \sqrt{+\frac{36}{9}}$$

$$x_2 = +\frac{4}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$x_3 = +\frac{4}{3} + \frac{6}{3} = +\frac{10}{3}$$

1.2 Substitution

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \qquad \textit{Substitution} \quad x^2 = z$$

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

$$z^2 - 10z + (-5)^2 = -9 + (-5)^2$$

$$(z-5)^2 = -9 + 25$$

$$z_{1,2} - 5 = \pm\sqrt{16}$$

$$z_{1,2} = 5 \pm 4$$

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = 9$$

Rücksubstitution $z_1 = x^2$ — *Rücksubstitution* $z_2 = x^2$

$x^2 = 1$ — $x^2 = 9$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{1}$ — $x_{3,4} = \pm\sqrt{9}$

$x_{1,2} = \pm 1$ — $x_{3,4} = \pm 3$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = +1$ — $x_3 = -3 \qquad x_4 = +3$

$$L = \{-3; -1; +1; +3\}$$

1.3 Übungsaufgaben:

a) $x^4 + 6x^3 + 8x^2 = 0$

b) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

2. Ableitungen

2.1 Ableitungsregeln

additive Konstante

$$y = f(x) + c \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x)$$

Beispiel: $y = x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \cdot x$

multiplikative Konstante

$$y = a \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = a \cdot f'(x)$$

Beispiel: $y = 4 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 4 \cdot 2 \cdot x \qquad y' = 8 \cdot x$

Potenzregel

$$y = f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Beispiel: $y = x^6 \quad \Rightarrow \quad y' = 6 \cdot x^5$

Summenregel

$$y = g(x) \pm h(x) \quad \Rightarrow \quad y' = g'(x) \pm h'(x)$$

Beispiel: $y = x^4 - 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 6 \quad \Rightarrow \quad y' = 4 \cdot x^3 - 6 \cdot x + 5$

Produktregel

$$y = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beispiel: $y = \underbrace{\left(x^2 + 4\right)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\left(x^3 + 3 \cdot x\right)}_{v(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \underbrace{(2 \cdot x)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\left(x^3 + 3 \cdot x\right)}_{v(x)} + \underbrace{\left(x^2 + 4\right)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\left(3 \cdot x^2 + 3\right)}_{v'(x)}$

Quotientenregel

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Beispiel: $y = \frac{x^6 + 2 \cdot x^2}{x - 1} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\left(6 \cdot x^5 + 4 \cdot x\right) \cdot (x - 1) - \left(x^6 + 2 \cdot x^2\right) \cdot (1)}{[x - 1]^2}$

Kettenregel

$$f(x) = g[h(x)] \quad \Rightarrow \quad f(x)' = g'[h(x)] \cdot h'(x)$$

Beispiel: $y = \left(3 \cdot x^2 + 5 \cdot x\right)^3 \quad \Rightarrow \quad y' = 3 \cdot \left(3 \cdot x^2 + 5 \cdot x\right)^2 \cdot (6 \cdot x + 5)$

2.2 Übungsaufgaben:

3. Differentialrechnung - Kurvendiskussion einer ganzrationalen Funktion

3.1 Beispiel Diskutieren Sie folgende ganzrationale Funktion $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$

a) Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$

b) Schnittpunkte mit den Achsen:

a) Schnittpunkt mit der y-Achse $f(0) = 0^3 + 4 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 18 = -18 \Rightarrow S_y(0/-18)$

b) Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen)

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = 0$ Da eine **Faktorisierung** (Kapitel 1) nicht möglich ist, muss man eine Nullstelle „raten". Das sollte man mit dem **Hornerschema** (Kapitel 10) durchführen, da das Hornerschema bei einer gefundenen Nullstelle gleichzeitig die **Polynomdivision** (Kapitel 9) durchführt.

$x^3 + 4x^2 - 3x - 18$

Hornerschema für $x = 2$

1	4	−3	−18
	2	12	18
1	6	9	$0 = f(2)$

daraus folgt das reduzierte Polynom:

$$f_{red}(x) = 1x^2 + 6x + 9$$

$$f_{red}(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = -9 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \qquad \textit{Quadratische Ergänzung}$$

$$(x+3)^2 = -9 + 9 \qquad \textit{Anmerkung}: (x+3)^2 = (x+3) \cdot (x+3) = 0$$

$$x_{02} = -3 \pm \sqrt{0} \qquad \Rightarrow \textit{doppelte Nullstelle}$$

$$x_{02} = -3$$

Nullstellen: $N_1(2/0)$ $N_2(-3/0)$

Schreibt man die Funktion in der Linearfaktordarstellung, erkennt man, das es sich bei N_2 um eine doppelte Nullstelle handelt. Das heißt der Graph der Funktion schneidet die x-Achse in diesem Punkt nicht sondern er berührt nur die x-Achse.

Linearfaktordarstellung: $f(x) = (x-2) \cdot (x+3) \cdot (x+3) = (x-2) \cdot (x+3)^2$

c) Symmetrieeigenschaften

Achsensymmetrie:

$$f(x) = f(-x)$$

$$x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = (-x)^3 + 4(-x)^2 - 3(-x) - 18$$

$$+x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = -x^3 + 4x^2 + 3x - 18$$

Es liegt keine Achsensymmetrie vor!

Punktsymmetrie:

$$f(x) = -f(-x)$$

$$x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = -\left((-x)^3 + 4(-x)^2 - 3(-x) - 18\right)$$

$$+x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = +x^3 - 4x^2 - 3x + 18$$

Es liegt keine Punktsymmetrie vor!

d) Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x\to\infty} x^3+4x^2-3x-18$$
$$=\lim_{x\to\infty} x^3\cdot\left(1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{18}{x^3}\right)$$
$$=\infty^3\cdot\left(1+\frac{4}{\infty}-\frac{3}{\infty^2}-\frac{18}{\infty^3}\right) \qquad \frac{4}{\infty},\ -\frac{3}{\infty^2}\ \textit{und}\ -\frac{18}{\infty^3}$$
$$=\infty^3\cdot 1 \qquad \textit{sind Nullfolgen d.h.}$$
$$=\infty \qquad \textit{sie konvergieren für } x\to\infty \textit{ gegen } 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3+4x^2-3x-18$$
$$=\lim_{x\to\infty} x^3\cdot\left(1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{18}{x^3}\right)$$
$$=(-\infty)^3\cdot\left(1+\frac{4}{-\infty}-\frac{3}{(-\infty)^2}-\frac{18}{(-\infty)^3}\right)$$
$$=-\infty^3\cdot 1$$
$$=-\infty$$

e) Extremwerte

$$f'(x)=3x^2+8x-3$$
$$f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 3x^2+8x-3=0 \qquad \textit{notwendige Bedingung}$$
$$x^2+\frac{8}{3}x-1=0$$
$$x^2+\frac{8}{3}x+\left(\frac{8}{6}\right)^2=+1+\left(\frac{8}{6}\right)^2 \qquad \textit{Quadratische Ergänzung}$$
$$\left(x+\frac{4}{3}\right)^2=+\frac{9}{9}+\frac{16}{9}$$
$$x_{E1,2}=-\frac{4}{3}\pm\sqrt{\frac{25}{9}}$$
$$x_{E1}=-\frac{4}{3}-\frac{5}{3}=-3$$
$$x_{E2}=-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=+\frac{1}{3}$$

$$f''(x)=6x+8$$
$$f''(x_E)\neq 0 \qquad \textit{hinreichende Bedingung}$$

$$f''(-3)=6\cdot(-3)+8=-10 \quad <0 \quad\Rightarrow \textit{Hochpunkt}$$
$$f''\left(\frac{1}{3}\right)=6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+8=+10 \quad >0 \quad\Rightarrow \textit{Tiefpunkt}$$

Koordinaten der Extremwerte

$$f(-3)=0$$
$$f\left(\frac{1}{3}\right)=-18\frac{14}{27}$$

$$H(-3/0) \quad \textit{und} \quad T\left(\frac{1}{3}\Big/-18\frac{14}{27}\right)$$

f) Wendestellen

$$f''(x)=6x+8$$
$$f''(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 6x+8=0 \qquad \textit{notwendige Bedingung}$$
$$x_{W1}=-\frac{4}{3}$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'''(x_W) \neq 0 \qquad \textit{hinreichende Bedingung}$$

$$f'''\left(-\frac{4}{3}\right) = 6 \quad > 0 \quad \Rightarrow \textit{Übergang von einer Rechtskrümmung}$$

$$\textit{in eine Linkskrümmung}$$

Koordinaten der Wendestelle

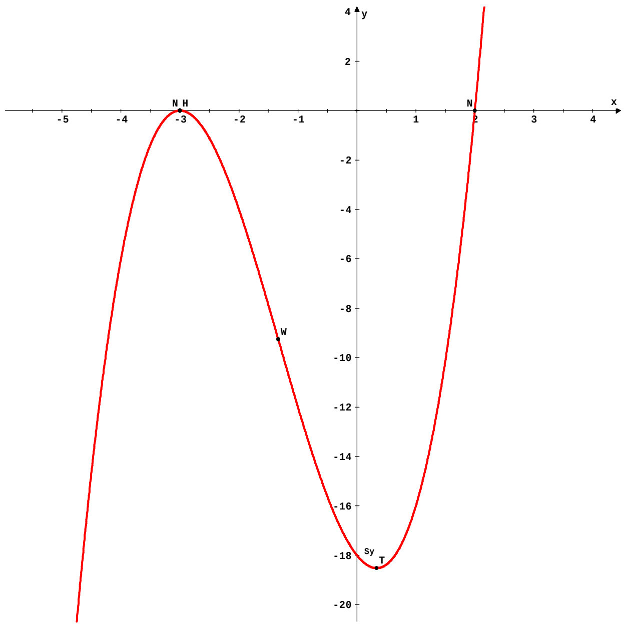
$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -9\frac{7}{27}$$

$$W\left(-\frac{4}{3} \Big/ -9\frac{7}{27}\right)$$

g) Wertebereich

$$W_f = \mathbb{R}$$

h) Graph der Funktion



3.2 Übungsaufgaben:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 3x$

4. Gebrochenrationale Funktionen

4.1 Beispiel Untersuchen Sie die Funktion $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-1}$ $f(x)=\frac{Z(x)}{N(x)}$ ohne Berechnung der Extremstellen und Wendestellen.

a) Definitionsbereich / Definitionslücken

$$N(x)\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-1\neq 0$$
$$x^2\neq 1$$
$$x_{1,2}\neq \pm 1 \quad D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1;+1\}$$
$$x_1\neq -1$$
$$x_2\neq +1$$

b) Achsenschnittpunkte

b1) Schnittpunkt mit der y-Achse $f(0)=\frac{2\cdot 0^2-1}{0^2-1}=\frac{-1}{-1}=1$ $\qquad S_y(0/1)$

b2) Schnittpunkte mit der x-Achse

$$f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x^2-1}{x^2-1}=0 \qquad |\cdot(x^2-1)$$
$$2x^2-1=0$$

Allgemein gilt: Für Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion muss gelten:

$$\boxed{Z(x)=0 \quad \wedge \quad N(x)\neq 0}$$

$$2x^2-1=0$$
$$2x^2=1$$
$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$x_1=-\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$x_2=+\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$N_1(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}/0) \qquad N_2(\sqrt{\tfrac{1}{2}}/0)$

c) Symmetrieeigenschaften

Achsensymmetrie:

$$f(x)=f(-x)$$
$$\frac{2x^2-1}{x^2-1}=\frac{2\left(-x^2\right)-1}{\left(-x\right)^2-1}$$
$$\frac{2x^2-1}{x^2-1}=\frac{2x^2-1}{x^2-1}$$

Die Funktion ist Achsensymmetrisch!

d) Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{2-\frac{1}{\infty^2}}{1-\frac{1}{\infty^2}} = 2$$

$-\frac{1}{\infty^2}$ *ist eine Nullfolge d.h. sie konvergieren gegen Null.*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{2-\frac{1}{(-\infty)^2}}{1-\frac{1}{(-\infty)^2}} = 2$$

e) Verhalten am Pol

Allgemein gilt: Für Pole einer gebrochenrationalen Funktion muss gelten:

$$\boxed{Z(x)\neq 0 \quad \wedge \quad N(x)=0}$$

$$\Rightarrow x_{p1}=-1 \quad \wedge \quad x_{p2}=+1$$

Hinweis: Eine Vereinfachung für die nachfolgenden Grenzwertbetrachtungen durch Zerlegung des Nenners $N(x)$ und den Zählers $Z(x)$ in Linearfaktoren ist nicht möglich, da keine Lücke existiert, die man herauskürzen könnte.

Rechtsseitiger Grenzwert

für $x_0=-1$: $\lim_{h\to 0}\frac{2(x_0+h)^2-1}{(x_0+h)^2-1}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2(-1+h)^2-1}{(-1+h)^2-1} = \lim_{h\to 0}\frac{2h^2-4h+2-1}{h^2-2h+1-1} = \lim_{h\to 0}\frac{2h^2-4h+1}{h^2-2h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left(2h-4+\frac{1}{h}\right)}{\cancel{h}(h-2)} = \lim_{h\to 0}\frac{2h-4+\frac{1}{h}}{h-2} = \frac{2\cdot 0-4+\frac{1}{0}}{0-2} = \frac{-4+\frac{1}{0}}{-2}$$

$\frac{1}{0}$ *konvergiert gegen* ∞

$$= \frac{\infty}{-2} = -\infty$$

Linksseitiger Grenzwert

für $x_0=-1$: $\lim_{h\to 0}\frac{2(x_0-h)^2-1}{(x_0-h)^2-1}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2(-1-h)^2-1}{(-1-h)^2-1} = \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+4h+2-1}{h^2+2h+1-1} = \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+4h+1}{h^2+2h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left(2h+4+\frac{1}{h}\right)}{\cancel{h}(h+2)} = \lim_{h\to 0}\frac{2h+4+\frac{1}{h}}{h+2} = \frac{2\cdot 0+4+\frac{1}{0}}{0+2} = \frac{+4+\frac{1}{0}}{+2}$$

$\frac{1}{0}$ *konvergiert gegen* ∞

$$= \frac{\infty}{+2} = +\infty$$

Das bedeutet:

- Nähert man sich dem Pol bei $x_p = -1$ von rechts, dann werden die Funktionswerte unendlich groß aber mit negativen Vorzeichen. D.h. die Funktion fällt nach unten ab.
- Nähert man sich dem Pol bei $x_p = -1$ von links, dann werden die Funktionswerte unendlich groß aber mit positiven Vorzeichen. D.h. die Funktion steigt nach oben.

Die gleiche Grenzwertbetrachtung muss man nun noch für $x_p = +1$ durchführen.
Man erhält folgendes Ergebnis:

- Nähert man sich dem Pol bei $x_p = +1$ von rechts, dann werden die Funktionswerte unendlich groß aber mit positiven Vorzeichen. D.h. die Funktion steigt nach oben.
- Nähert man sich dem Pol bei $x_p = +1$ von links, dann werden die Funktionswerte unendlich groß aber mit negativen Vorzeichen. D.h. die Funktion fällt nach unten ab.

f) Verhalten an der Lücke

Allgemein gilt: Für Lücken einer gebrochenrationalen Funktion muss gelten:

$$\boxed{Z(x) = 0 \qquad \wedge \qquad N(x) = 0}$$

Ergebnis: Die Funktion besitzt keine Lücken.

g) Extremstellen

$$\textit{Notwendige Bedingung} \qquad f'(x) = 0$$

Bei gebrochenrationalen Funktionen können die Ableitungen relativ kompliziert werden.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{(4x) \cdot (x^2 - 1) - (2x^2 - 1) \cdot (2x)}{[x^2 - 1]^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 4x - 4x^3 + 2x}{[x^2 - 1]^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{[x^2 - 1]^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-2x}{[x^2 - 1]^2} = 0$$

$$-2x = 0$$

$$x_E = 0$$

Hinreichende Bedingung $f''(x) \neq 0$

$$f'(x) = \frac{-2x}{\left[x^2-1\right]^2} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f''(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2) \cdot (x^4 - 2x^2 + 1) - (-2x) \cdot (4x^3 - 4x)}{\left[x^4 - 2x^2 + 1\right]^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^4 + 4x^2 - 2 + 8x^4 - 8x^2}{\left[x^4 - 2x^2 + 1\right]^2}$$

$$f''(x) = \frac{6x^4 - 4x^2 - 2}{\left[x^4 - 2x^2 + 1\right]^2}$$

$$f''(0) = \frac{6 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^2 - 2}{\left[0^4 - 2 \cdot 0^2 + 1\right]^2} = -2 \ < \ 0 \ \Rightarrow \ \textit{Hochpunkt}$$

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 1}{0^2 - 1} = 1 \qquad H\left(0/1\right)$$

h) Wendestellen

Notwendige Bedingung $f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{6x^4 - 4x^2 - 2}{\left[x^4 - 2x^2 + 1\right]^2} = 0$

$$6x^4 - 4x^2 - 2 = 0$$

$$x^4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3} = 0$$

$$z^2 - \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} = 0$$

$$\left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$z_{1,2} = +\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$$

$$z_1 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{1}{3} \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}} \notin \mathbb{R}$$

$$z_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \qquad x_{3,4} = \pm 1 \notin D_f$$

Es existieren in diesem Fall keine Wendestellen.

i) Asymptote

Zur Berechnung der Asymptotenfunktion verwendet man die **Polynomdivision**:

$$\left(2x^2-1\right):\left(x^2-1\right)=2+\frac{1}{x^2-1}$$

$$\underline{-\left(2x^2-2\right)}$$

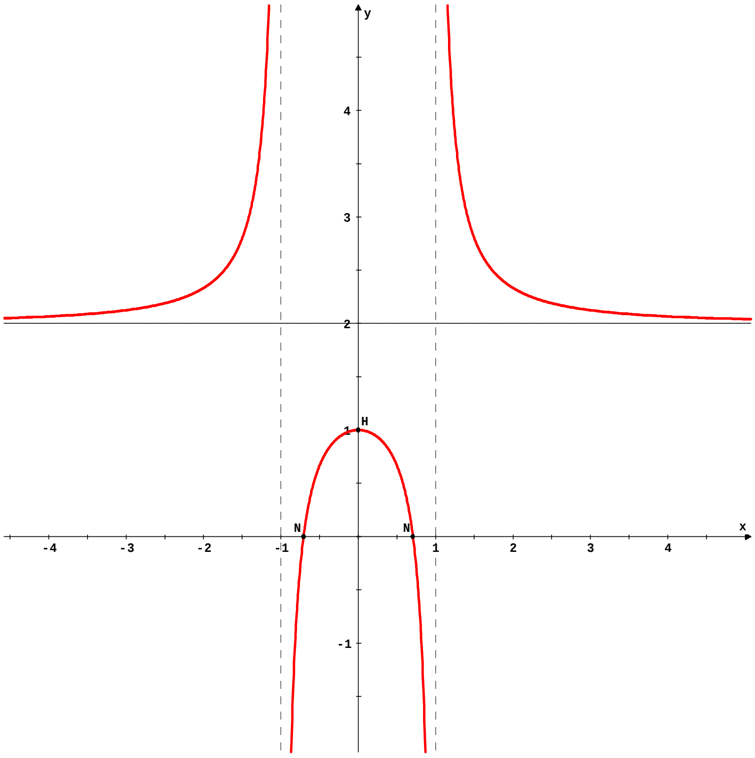
$$0 \quad 1$$

$$y_A = 2$$

j) Wertebereich

$$W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \le 1 \wedge y > 2\}$$

k) Graph der Funktion



4.2 Übungsaufgaben

a) $f(x)=\frac{x+1}{-x+3}$

b) $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$

c) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+1}$

5. Integralrechnung

5.1 unbestimmte Integrale

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C}$$

Beispiele: Bestimmen Sie folgende unbestimmte Integrale d.h. bestimmen Sie die Stammfunktion:

a) $\int x^6 dx \;=\; \frac{1}{7}x^7 + C$

b) $\int \left(\frac{1}{2}x^3 + 2x + 4\right) dx \;=\; \frac{1}{8}x^4 + x^2 + 4x + C$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \;=\; \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx \;=\; \int x^{-\frac{1}{2}} dx \;=\; 2x^{\frac{1}{2}} + C$

Aufgaben:

a) $\int 2x^4 dx$

b) $\int 3x^4 - 6x^2 + 2\, dx$

c) $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

5.2 bestimmte Integrale

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Beispiele: Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

a) $\int_1^3 x^2 dx \;=\; \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 \;=\; \left(\frac{1}{3}3^3\right) - \left(\frac{1}{3}3^1\right) \;=\; 9 - 1 \;=\; 8$

b) $\int_3^5 (2x+3)dx = \left[x^2 + 3x\right]_3^5 = \left(5^2 + 3\cdot 5\right) - \left(3^2 + 3\cdot 2\right) = 25$

Aufgaben:

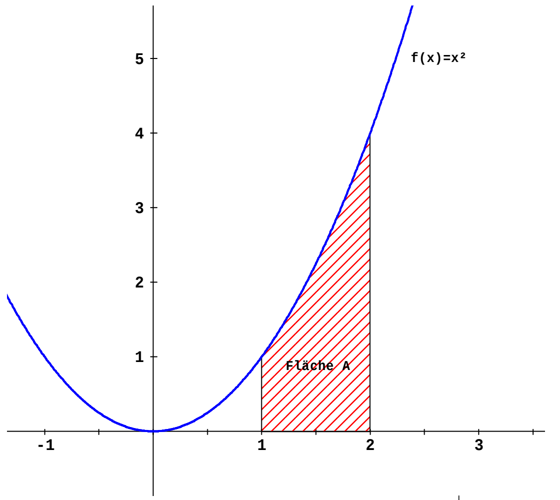
a) $\int_2^4 x^3 dx$

b) $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{2}{x^3} dx$

c) $\int_1^2 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}\right) dx$

5.3 Flächenberechnung

Beispiele:



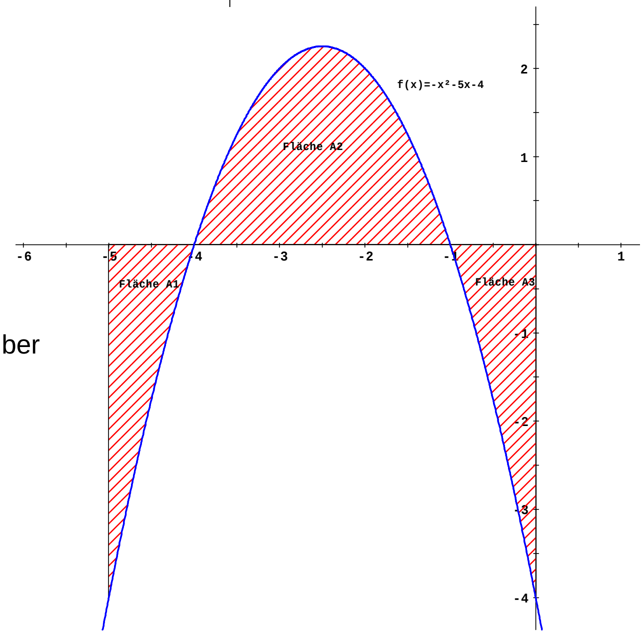
a) Berechne Sie die Maßzahl für die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)=x^2$ und der x-Achse über dem Intervall [1;2].

$$A=\int_1^2 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{7}{3}$$

Beachte: Flächen oberhalb der x-Achse ergeben positive Maßzahlen und Flächen unterhalb der x- Achse ergeben negative Maßzahlen.

Um eine Gesamtfläche zu berechen, muss man daher alle Nullstellen einer Funktion innerhalb des betrachtenden Intervalls berücksichtigen und von den einzelnen Maßzahlen die Beträge berechnen und addieren.

A_{Gesamt} = $|A_1|$ + $|A_2|$ + $|A_3|$ usw.



b) Berechne Sie die Maßzahl für die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)=-x^2-5x-4$ und der x-Achse über dem Intervall [-5;0].

$$f(x)=0 \;\Rightarrow\; -x^2-5x-4=0$$
$$x^2+5x+4=0$$
$$x_{1/2}=-\tfrac{5}{2}\pm\sqrt{\tfrac{25}{4}-\tfrac{16}{4}}$$
$$x_1=-4$$
$$x_2=-1$$

$$A_{Gesamt}=\int_{-5}^{0}\left(-x^2-5x-4\right)dx=\left|\int_{-5}^{-4}\left(-x^2-5x-4\right)dx\right|+\int_{-4}^{-1}\left(-x^2-5x-4\right)dx+\left|\int_{-1}^{0}\left(-x^2-5x-4\right)dx\right|$$

$$A_{Gesamt}=\left|\left[-\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{5}{2}x^2-4x\right]_{-5}^{-4}\right|+\left|\left[-\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{5}{2}x^2-4x\right]_{-4}^{-1}\right|+\left|\left[-\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{5}{2}x^2-4x\right]_{-1}^{0}\right|$$

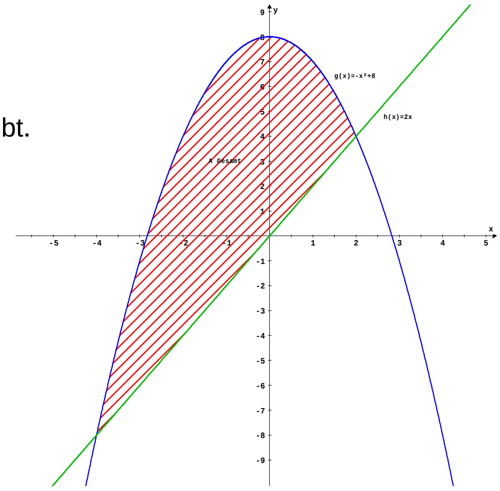
$$A_{Gesamt}=\left|\left(-\tfrac{16}{6}\right)-\left(-\tfrac{5}{6}\right)\right|+\left|\left(\tfrac{11}{6}\right)-\left(-\tfrac{16}{6}\right)\right|+\left|\left(0\right)-\left(\tfrac{11}{6}\right)\right|=\left|-\tfrac{11}{6}\right|+\left|\tfrac{27}{6}\right|+\left|-\tfrac{11}{6}\right|=\tfrac{11}{6}+\tfrac{27}{6}+\tfrac{11}{6}=\tfrac{49}{6}=8\tfrac{1}{6}$$

Aufgaben:
Berechne Sie die Maßzahl für die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f(x) und der x-Achse über dem angegebenen Intervall:

a) $f(x)=2x^2-3x$ $\quad [2;4]$

b) $f(x)=x^2-2x$ $\quad [-1;2]$

c) $f(x)=x^3-2x^2$ $\quad [-1;3]$



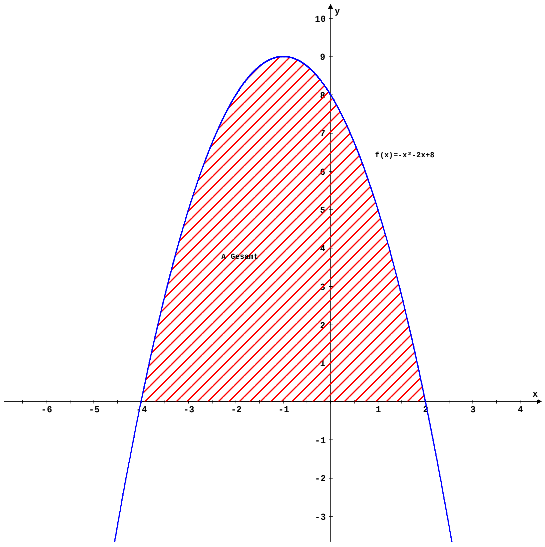
Beispiel:
Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche zwischen den Graphen $g(x) = -x^2 + 8$ und $h(x) = 2x$ über dem Intervall, das sich aus den beiden Schnittpunkten der beiden Graphen x_{S1} und x_{S2} ergibt.

$$g(x) = h(x) \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 8 = 2x$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$x_1 = -4$$
$$x_2 = 2$$

Differenzfunktion: $f(x) = g(x) - h(x) = -x^2 - 2x + 8$

Nullstellen der Differenzfunktion: Die Funktion besitzt im Intervall zwischen -4 und 2 keine weiteren Nullstellen.

$$A = \int_{-4}^{2} \left(-x^2 - 2x + 8\right) dx = \left|\left[-\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 8x\right]_{-4}^{2}\right| = \left|\left(\tfrac{28}{3}\right) - \left(-\tfrac{80}{3}\right)\right| = 36$$



Aufgaben:
Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche zwischen den Graphen g(x) und h(x) über dem angegebenen Intervall bzw. über das Intervall, das sich aus den beiden Schnittpunkten der beiden Graphen x_{S1} und x_{S2} ergibt.

a) $g(x) = x^2 - 1$ $\qquad h(x) = x + 1$ $\qquad [x_{S1}; x_{S2}]$

b) $g(x) = 0{,}5x^2 - 4$ $\qquad h(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$ $\qquad [x_{S1}; x_{S2}]$

c) $g(x) = -x^2 + 4$ $\qquad h(x) = -2x + 1$ $\qquad [-2; 1]$

5.4 Anwendungsaufgaben

Rotationskörper

Bogenlänge

6. Umkehrfunktion

Das folgende Thema ist noch nicht fertig gestellt!

7. Nichtrationale Funktionen

Das folgende Thema ist noch nicht fertig gestellt!

7.1 Wurzelfunktionen

7.2 Exponentialfunktionen

7.3 Logarithmusfunktionen

7.4 trigonometrische Funktionen

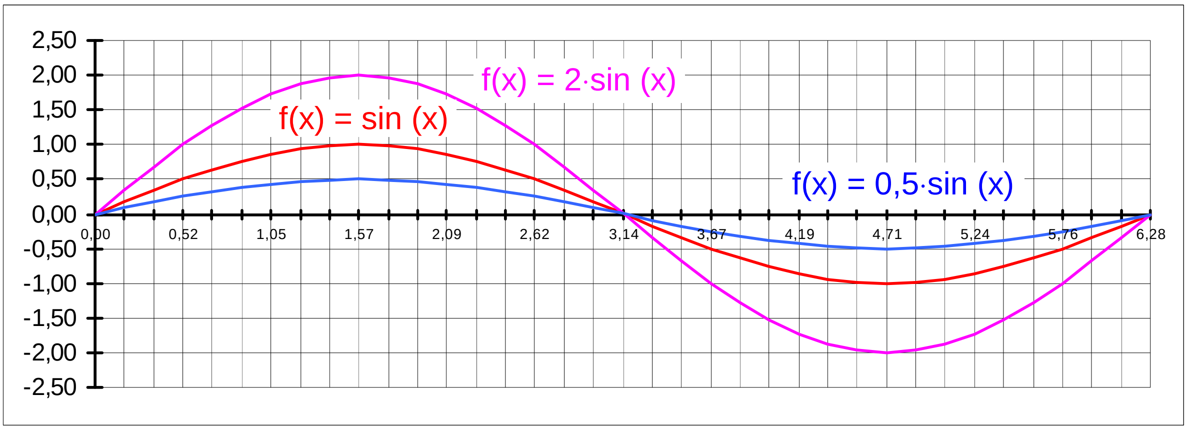
Bogenmaß

Funktionsverläufe

Variationen der Sinus- und Kosinusfunktion

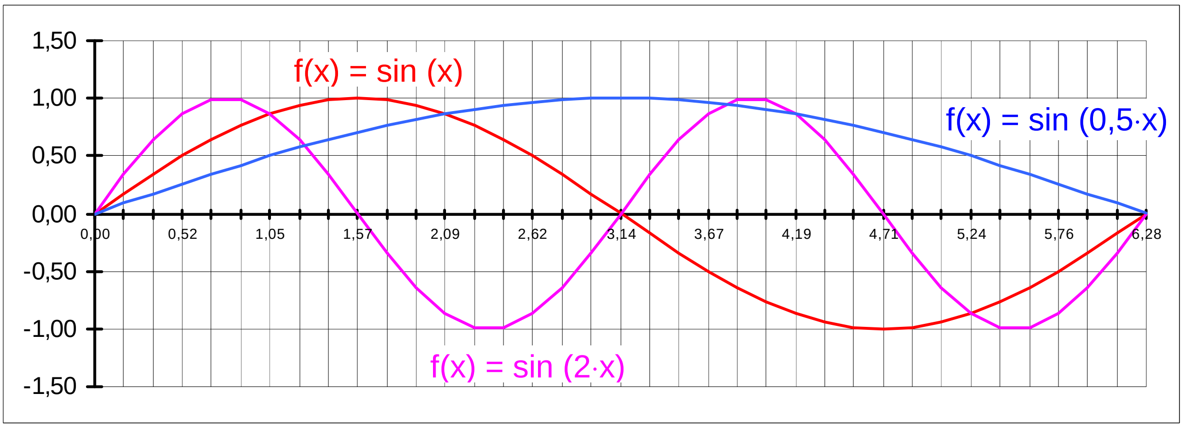
Variation der Amplitude

$f(x) = m \cdot \sin(x)$



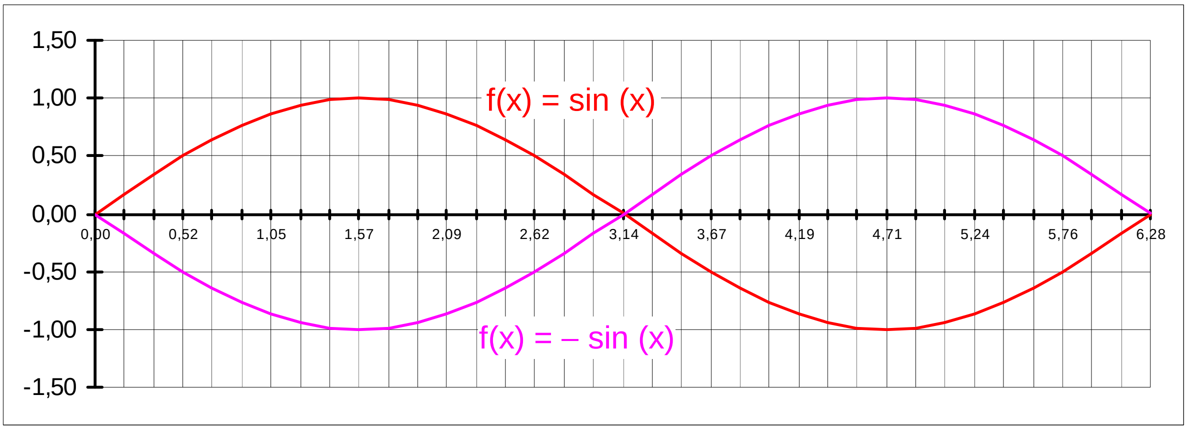
Variation der Periode

$f(x) = \sin(c \cdot x)$



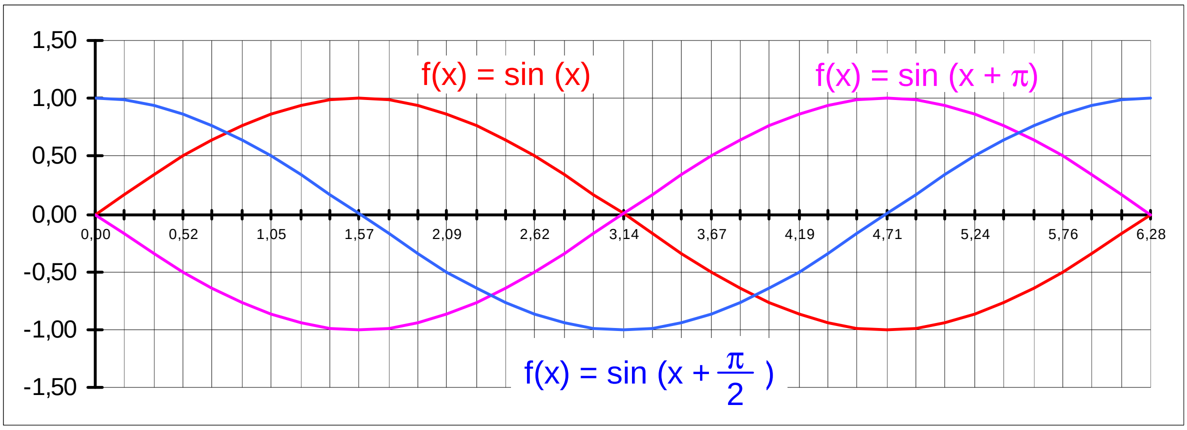
Spiegelung der Sinusfunktion

$f(x) = -\sin(x)$



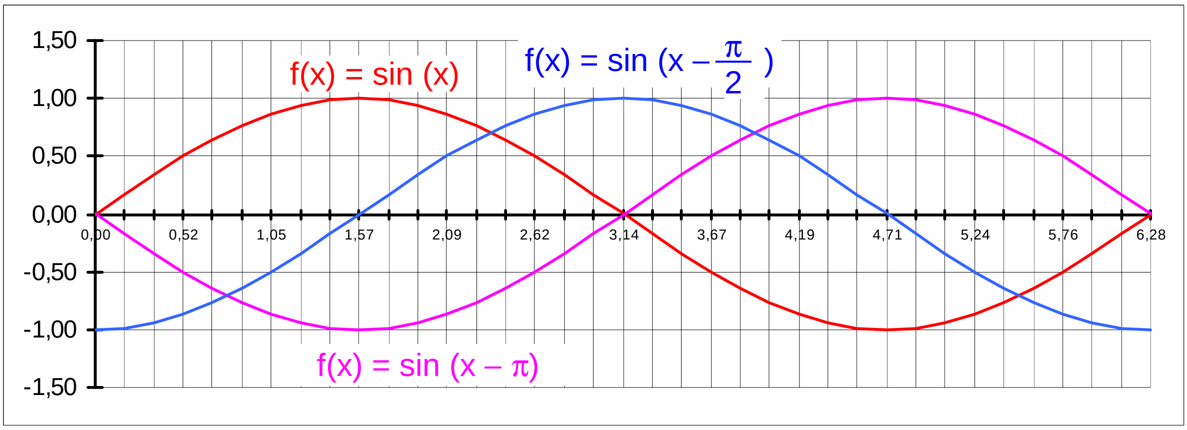
Phasenverschiebung

$$f(x) = \sin(x + a)$$



Phasenverschiebung

$$f(x) = \sin(x - a)$$



Variationen der Sinusfunktion

$$\boxed{f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d}$$

a = Stauchung oder Streckung → Amplitude

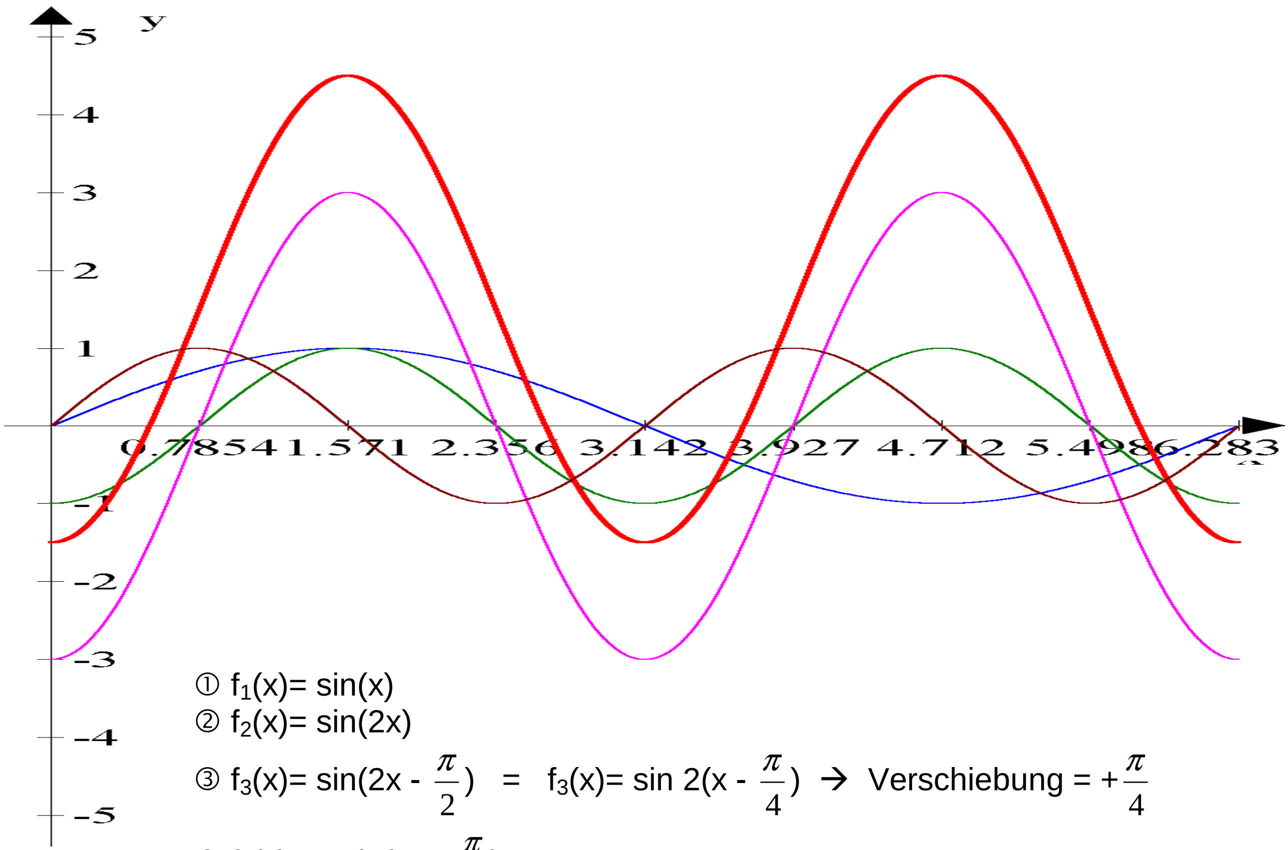
b = Verlängerung oder Verkürzung der Periode (Periode = $\frac{2\pi}{|b|}$)

c = Phasenverschiebung (Verschiebung um $-\frac{c}{b}$ in Richtung der x-Achse)

d = Verschiebung um d in Richtung der y-Achse

Technische Schreibweisen: $a(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) + d$ / $u(t) = u0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Beispiel: $f(x) = 3 \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{2}) + 1{,}5$



① $f_1(x) = \sin(x)$

② $f_2(x) = \sin(2x)$

③ $f_3(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$ = $f_3(x) = \sin 2(x - \frac{\pi}{4})$ → Verschiebung = $+\frac{\pi}{4}$

④ $f_4(x) = 3 \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{2})$

⑤ $f_5(x) = 3 \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{2}) + 1{,}5$

Periode: $p = \pi$

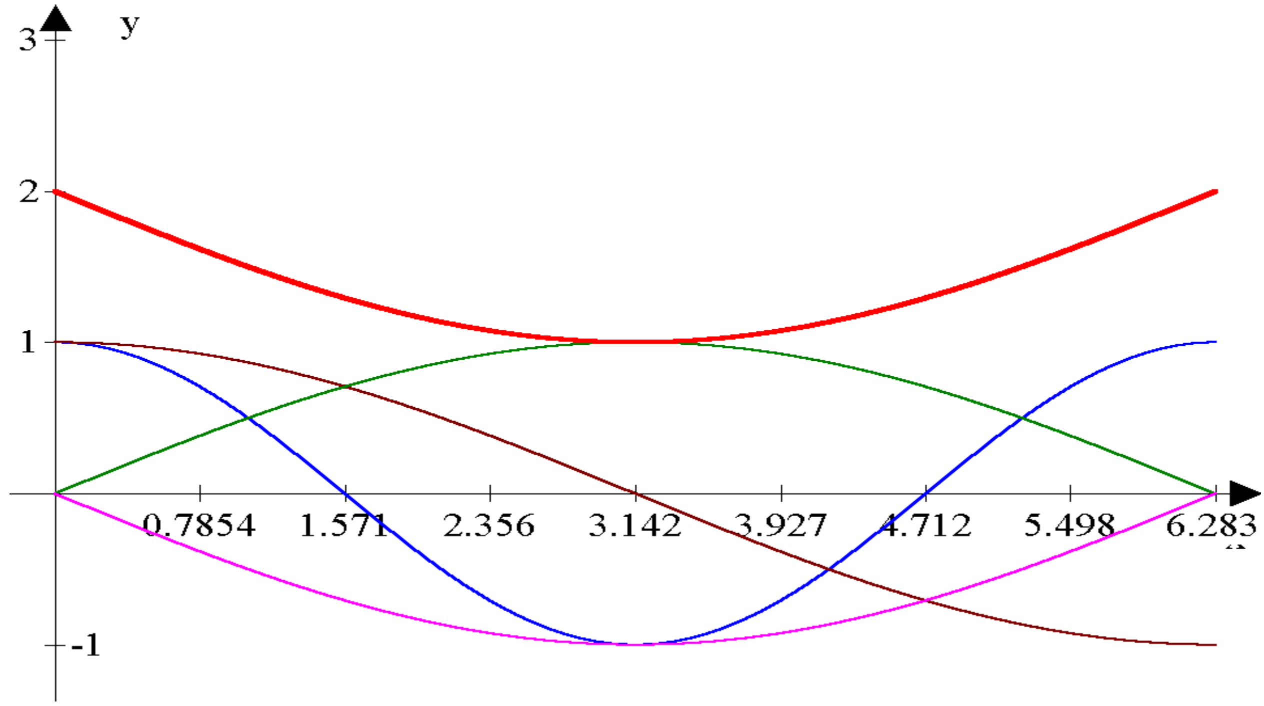
Extremwerte: Max: $\{k\pi + \frac{\pi}{2} \, ; \, 4{,}5\}$ $k \in$ Z

Min: $\{k\pi \, ; \, -1{,}5\}$

Nullstellen: $\{k\pi + \frac{\pi}{6} \, ; \, 0\}$ $\{k\pi - \frac{\pi}{6} \, ; \, 0\}$

Variationen der Kosinusfunktion

$$f(x) = -\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$$



① $f_1(x) = \cos(x)$

② $f_2(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

③ $f_3(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) = \quad f_3(x) = \cos\frac{1}{2}(x - \pi)$ → Verschiebung = $-\pi$

④ $f_4(x) = -\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$

⑤ $f_5(x) = -\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$

Periode: $p = 4\pi$

Extremwerte: Max: $\{(4k-1)\pi\ ;\ 3\}$ $\quad k \in Z$

Min: $\{(4k+1)\pi\ ;\ 1\}$

Nullstellen:

$$-\cos\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{\pi}{2}\right) + 2 = 0$$

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{\pi}{2}\right) = +2$$

$$\tfrac{1}{2}x - \tfrac{\pi}{2} = \cos^{-1}(2) \qquad \notin R$$

8. Grenzwerte

Das folgende Thema ist noch nicht fertig gestellt!

8.1 Grenzwert für $x \rightarrow x_0$

8.2 Grenzwert für $x \rightarrow \pm\infty$

8.3 Regel von L'Hospital

9. Lineare und quadratische Ungleichungen

Das folgende Thema ist noch nicht fertig gestellt!

10. Polynomdivision - Übungen

Beispiele:

a)

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3-2x^2-5x+6\right):\left(x-3\right)=\underline{\underline{x^2+x-2}}\\
\underline{-\left(x^3-3x^2\right)}\\
\quad 0 \quad x^2-5x+6\\
\quad\quad \underline{-\left(x^2-3x\right)}\\
\quad\quad\quad 0 \;\; -2x+6\\
\quad\quad\quad \underline{-\left(-2x+6\right)}\\
\quad\quad\quad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{l}
\left(6a^6+a^4b+25b^3\right):\left(3a^2+5b\right)=\underline{\underline{2a^4-3a^2b+5b^2}}\\
\underline{-\left(6a^6+10a^4b\right)}\\
\quad 0 \quad -9a^4b+25b^3\\
\quad\quad \underline{-\left(9a^4b-15a^2b^2\right)}\\
\quad\quad\quad 0 \quad +15a^2b^2+25b^3\\
\quad\quad\quad \underline{-\left(+15a^2b^2+25b^3\right)}\\
\quad\quad\quad\quad 0 \quad\quad 0
\end{array}
$$

Übungsaufgaben:
Berechnen Sie das Restpolynom mit Hilfe der Polynomdivision, wenn eine Nullstelle gegeben ist:

a) $f(x)=x^4-5x^2+6x-8 \qquad x_{01}=2$

b) $f(x)=\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{4}x^4-2x^3-x^2-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4} \qquad x_{01}=-\frac{1}{2}$

c) $\left(15a^9-8a^6b+8b^3\right):\left(3a^3+2b\right)$

d) $\left(14a^4-a^3+5a^2-3a+1\right):\left(7a^2-4a+1\right)$

11. Hornerschema - Übungen

Das Horner-Schema

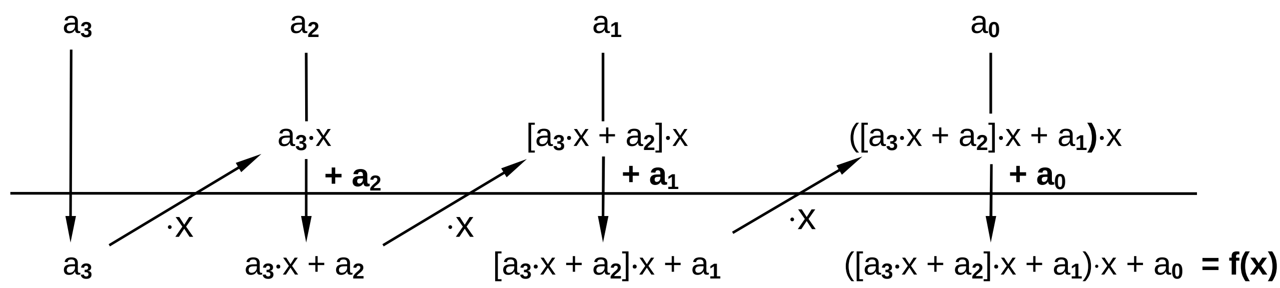
$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

$$f(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

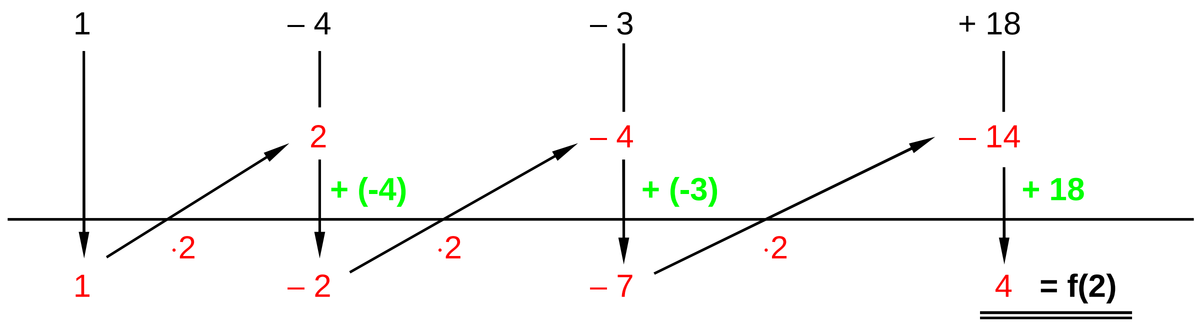
$$f(x) = (a_3 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_1) \cdot x + a_0$$

$$f(x) = ([a_3 \cdot x + a_2] \cdot x + a_1) \cdot x + a_0$$

Beispiel: ganzrationale Funktion 3. Ordnung



Beispiel: $f(x) = x^3 - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 18$ gesucht: $f(2) = ?$



Übungsaufgaben:

Berechnen Sie folgende Funktionswerte mit Hilfe des Horner-Schemas:

$g(x) = 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 - 5 \cdot x - 6$ $g(4)$

$h(x) = 0{,}2 \cdot x^3 - 0{,}8 \cdot x^2 - 2{,}2 \cdot x + 10$ $h(-2{,}5)$

12. Nullstellenbestimmung ganzrationaler Funktionen – Fundamentalsatz der Algebra

Vorgehensweise:

$$p_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

$$p_n(x) = 0$$

Jedes Polynom kann in Linearfaktoren zerlegt werden:

Nullstelle

$$p_n(x) = a_n \cdot \underbrace{(x - x_{01})}_{\textbf{Linearfaktor}} \cdot p_{n-1}(x)$$

Formfaktor **Restpolynom**

Das Restpolynom $p_{n-1}(x)$ erhält man, indem man die Polynomfunktion $p_n(x)$ durch einen Linearfaktor $(x - x_{01})$ dividiert.

$$p_n(x) = a_n \cdot (x - x_{01}) \cdot p_{n-1}(x) \qquad | : (x - x_{01})$$

$$p_n(x) : (x - x_{01}) = a_n \cdot p_{n-1}(x)$$

→ Polynomdivision

Liegt ein Polynom 3. oder höherer Ordnung vor, muss man die Nullstelle durch gezieltes Suchen auffinden bevor man die Polynomdivision durchführen kann.

Wie in dem nächsten Beispiel zu sehen ist, kann man außer der Polynomdivision das reduzierte Polynom auch direkt aus dem Hornerschema ablesen, wenn das Schema eine Nullstelle ergibt.

Beispiel: $f(x) = 2x^4 + 8x^3 - 14x^2 - 44x + 48$

1. Suchen einer Nullstelle mit dem Hornerschema:

$$2x^4 + 8x^3 - 14x^2 - 44x + 48 = 0$$

$$f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{01} = 1$$

2. Ermittlung des reduzierten Polynoms mit der Polynomdivision bzw. dem Hornerschema:

$$(2x^4 + 8x^3 - 14x^2 - 44x + 48) : (x - 1) = 2x^3 + 10x^2 - 4x - 48$$

reduziertes Polynom: $f(x) = 2x^3 + 10x^2 - 4x - 48$

2	8	– 14	– 44	+ 48
	+ 2	+ 10	+ – 4	+ – 48
2	+10	– 4	– 48	0 = f(1)

·1 ·1 ·1 ·1

Wichtig: Man kann erkennen, dass wenn das Hornerschema eine Nullstelle ergibt, in der unteren Zeile des Schemas die Koeffizienten des reduzierten Polynoms stehen. Das bedeutet, eine Polynomdivision wäre dann nicht mehr notwendig.

3. Suchen der zweiten Nullstelle mit dem Hornerschema:

$$2x^3 + 10x^2 - 4x - 48 = 0$$

$$f(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{02} = 2$$

4. Ermittlung des reduzierten Polynoms mit der Polynomdivision bzw. dem Hornerschema:

$$(2x^3 + 10x^2 - 4x - 48) : (x - 2) = 2x^2 + 14x + 24$$

reduziertes Polynom: $f(x) = 2x^2 + 14x + 24$

2	10	– 4	– 48	
	+ 4	+ 28	+ 48	
+2	+ 14	24	0	= f(2)

·2 ·2 ·2

5. Quadratische Ergänzung:

$$2x^2 + 14x + 24 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$x_{03} = -4 \; ; \quad x_{04} = -3$$

6. Lösung: $\mathbb{L} = \{-4; -3; 1; 2\}$

Fundamentalsatz der Algebra:

Hat eine Polynomfunktion n-ten Grades die Nullstellen x_{01}; x_{02}; x_{03}; ... x_{0n}, so kann man sie als Produkt aus Linearfaktoren darstellen. a_n ist der Formfaktor der Funktion. ($x_{0n} \in \mathbb{Z}$)

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_{01}) \cdot (x - x_{02}) \cdot (x - x_{03}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{0n})$$

Beispiel: $f(x) = 2 \cdot (x + 4) \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades kann auch mehrfache Nullstellen besitzen:

Beispiel: $x_{01} = -2$ $\quad x_{02} = 5$ $\quad x_{03} = 5$ $\quad x_{04} = 8$ $\quad x_{05} = 8$ $\quad x_{06} = 8$

$$f(x) = (x + 2) \cdot (x - 5) \cdot (x - 5) \cdot (x - 8) \cdot (x - 8) \cdot (x - 8)$$

$$f(x) = (x + 2) \cdot (x - 5)^2 \cdot (x - 8)^3$$

$x_{01} = -2 \quad \Rightarrow$ einfache Nullstelle
$x_{02} = +5 \quad \Rightarrow$ doppelte Nullstelle
$x_{03} = +8 \quad \Rightarrow$ dreifache Nullstelle

Merke:

Eine Polynomfunktion n-ten Grades hat höchstens n- Nullstellen.

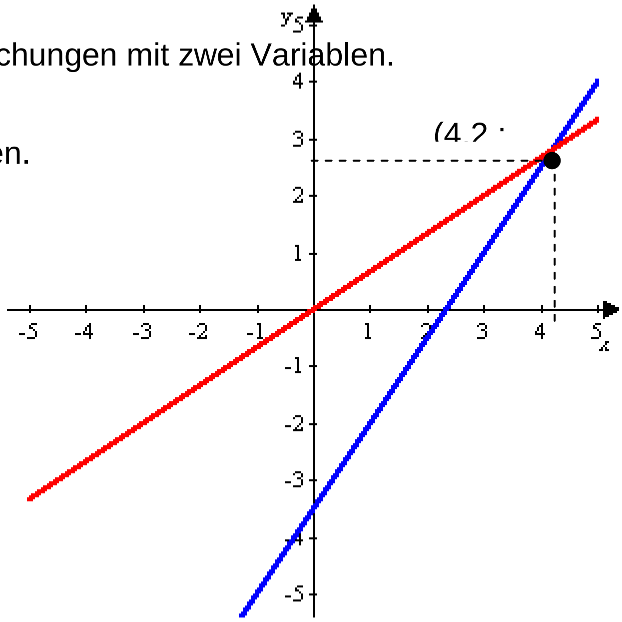
Eine Polynomfunktion ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.

Eine Polynomfunktion geraden Grades kann auch keine Nullstelle besitzen.

13. Lineare Gleichungssysteme - Übungen

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

$\left| \begin{array}{l} 3x-2y=7 \\ 2x-3y=0 \end{array} \right|$ ist ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen.



Beide Gleichungen sind durch und ($\wedge$) verbunden.
Die Lösungsmenge eines Gleichungssystems ist die Schnittmenge der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen.

$L = L_1 \cap L_2$

Jede lineare Gleichung kann durch eine Gerade dargestellt werden.
Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems entspricht den Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden.

$$\left| \begin{array}{l} 3x-2y=7 \\ 2x-3y=0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2} \\ y=\frac{2}{3}x \end{array} \right| \Rightarrow L = \{ (4{,}2\ ;\ 2{,}8) \}$$

Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Bei dem oben angeführten Beispiel ist das graphische Lösungsverfahren angewendet worden. Dieses Verfahren kann zu ungenauen Lösungen führen.
Daher bevorzugt man die rechnerische Verfahren wie:

Gleichsetzungsverfahren,

Einsetzungsverfahren und

Additionsverfahren.

Auch das **Determinaten-Verfahren** dient zur Lösung von Gleichungssystemen.

13.1 Einsetzungsverfahren

$$\begin{array}{l|rcrcr|l} \mathrm{I} & 4x & + & 5y & = & -1 & \\ \mathrm{II} & x & - & y & = & 11 & \ \mid +y \end{array}$$

(1) Eine der Gleichungen wird nach x oder y umgeformt.

$$\begin{array}{l|rcrcr|} \mathrm{I} & 4x & + & 5y & = & -1 \\ \mathrm{II} & x & = & 11 & + & y \end{array}$$

(2) Der Term für die umgeformte Variable wird in die andere Gleichung eingesetzt.

$$\text{II in I} \quad 4\cdot(11+y)+5y = -1$$
$$y = -5$$

(3) Die entstandene Gleichung lösen.

$$\mathrm{I} \quad 4x + 5\cdot(-5) = -1$$
$$x = 6$$

L = {(6 ; - 5)}

(4) Durch Einsetzen der Lösung in eine der Ausgangsgleichungen die zweite Variable bestimmen.

Übungsaufgaben:

a) 3x + 2y - z = 1
2x - 4z = 0
x + 2y + 2z= 0

b) 4x + 3y - 5z = 7
-5x - 4y + 3z = -8
3x + 2y - 2z = 6

13.2 Additionsverfahren

$$\begin{array}{l|rcrcr|l} \mathrm{I} & 3x & + & 2y & = & 12 & \ \mid \cdot(-2) \\ \mathrm{II} & 5x & + & 4y & = & 22 & \end{array}$$

(1) Man multipliziert eine Gleichung oder beide Gleichungen mit Faktoren, sodass sich die Faktoren vor x oder y nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

$$\begin{array}{l|rcrcr|} \mathrm{I} & -6x & - & 4y & = & -24 \\ \oplus\ \mathrm{II} & 5x & + & 4y & = & 22 \\ \hline & -x & & & = & -2 \\ & & & x & = & 2 \end{array}$$

(2) Bei der Addition beider Gleichungen fällt eine der Variablen heraus.

(3) Die entstandene Gleichung lösen.

$$\mathrm{I} \quad 3\cdot 2 + 2y = 12$$
$$y = 3$$

L = {(2 ; 3)}

(4) Durch Einsetzen der Lösung in eine der Ausgangsgleichungen die zweite Variable bestimmen.

13.3 Determinantenverfahren

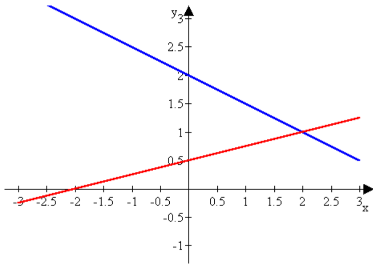
Das folgende Thema ist noch nicht fertig gestellt!

13.4 Matrizenrechnung

Das folgende Thema ist noch nicht fertig gestellt!

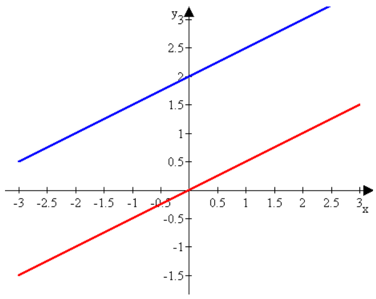
13.5 Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Bei der Lösung linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen können drei Fälle auftreten:



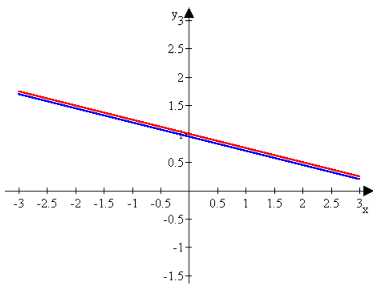
1. Das Gleichungssystem hat ***genau eine*** Lösung.
   Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.

$$\begin{array}{l|rcrcr|} \text{I} & x & + & 2y & = & 4 \\ \text{II} & -x & + & 4y & = & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad y = 1 \quad \Rightarrow \qquad L = \{(2\,;\,1)\}$$



2. Das Gleichungssystem hat ***keine*** Lösung.
   Die Geraden sind zueinander parallel.

$$\begin{array}{l|rcrcr|} \text{I} & -x & + & 2y & = & 4 \\ \text{II} & 2x & - & 4y & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad -8 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad L = \{\,\}$$



3. Das Gleichungssystem hat ***unendlich viele*** Lösung.
   Die Geraden fallen zusammen.

$$\begin{array}{l|rcrcr|} \text{I} & x & + & 4y & = & 4 \\ \text{II} & \frac{1}{2}x & + & 2y & = & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 2 = 2 \Rightarrow \qquad L = \{(x\,;\,-\tfrac{1}{4}x+1)\}$$